

Регрессионный анализ: продолжение

Теорема Фриша-Во-Ловелла

Матрица проекции (hat-matrix)

$$\vec{\hat{y}} = X\vec{\hat{\beta}} = X(X^T X)^{-1}X^T \vec{y}$$

$$H = X(X^T X)^{-1}X^T$$

Матрица H:

- Симметричная: $H = H^T$
- Идемпотентная: $H = H^2$
- $tr(H) = p$ (p – количество параметров в модели)

Матрица-аннигилятор M

$$\vec{y} = I\vec{y} = \underbrace{H\vec{y}}_{\text{проекция}} + \underbrace{I\vec{y} - H\vec{y}}_{\text{остаток}} = \underbrace{H\vec{y}}_{\text{проекция}} + \underbrace{(I - H)\vec{y}}_{\text{остаток}}$$

$$M = I - H = I - X(X^T X)^{-1} X^T$$

$$MX = (I - X(X^T X)^{-1} X^T)X = X - X(X^T X)^{-1} X^T X = 0$$

Матрица M является симметричной и идемпотентной

Доказательство теоремы Фриша-Во-Ловелла

Рассмотрим модель такого вида:

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + C\vec{\gamma} + \vec{\varepsilon}$$

X – матрица первого набора переменных; C – матрица второго набора переменных (как пример, набор контрольных характеристик)

Мы хотим получить $\vec{\hat{\beta}}$. Если мы очистим y от C и X от C , а далее оценим модель y очищенного на очищенные X , тогда мы получим тот же вектор оценок коэффициентов $\vec{\hat{\beta}}$, как и в исходной модели множественной регрессии

Доказательство теоремы Фриша-Во-Ловелла

Введем объединённую матрицу предикторов $Z = [X \ C]$
 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – вектор оценок коэффициентов, объединяющий $\vec{\hat{\beta}}$ и $\vec{\hat{\gamma}}$

$$Z^T Z \hat{\boldsymbol{\theta}} = Z^T \vec{y}$$

Тогда:

$$Z^T Z = \begin{pmatrix} X^T X & X^T C \\ C^T X & C^T C \end{pmatrix}, \quad Z^T \vec{y} = \begin{pmatrix} X^T \vec{y} \\ C^T \vec{y} \end{pmatrix}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} X^T X \hat{\beta} + X^T C \hat{\gamma} = X^T \vec{y} & (1) \\ C^T X \hat{\beta} + C^T C \hat{\gamma} = C^T \vec{y} & (2) \end{cases}$$

Доказательство теоремы Фриша-Во-Ловелла

Из уравнения (2):

$$C^T C \vec{\hat{\gamma}} = C^T \vec{y} - C^T X \hat{\beta}$$

Умножаем на $(C^T C)^{-1}$:

$$\vec{\hat{\gamma}} = (C^T C)^{-1} C^T \vec{y} - (C^T C)^{-1} C^T X \hat{\beta}$$

Подставляем $\hat{\gamma}$ в уравнение (1)

$$X^T X \vec{\hat{\beta}} + X^T C \left[(C^T C)^{-1} C^T \vec{y} - (C^T C)^{-1} C^T X \vec{\hat{\beta}} \right] = X^T \vec{y}$$

Раскрываем скобки:

$$X^T X \vec{\hat{\beta}} + X^T C (C^T C)^{-1} C^T \vec{y} - X^T C (C^T C)^{-1} C^T X \vec{\hat{\beta}} = X^T \vec{y}$$

Доказательство теоремы Фриша-Во-Ловелла

$$\left[X^T X - X^T C (C^T C)^{-1} C^T X \right] \hat{\vec{\beta}} = X^T \vec{y} - X^T C (C^T C)^{-1} C^T \vec{y}$$

Вспомним матрицу М:

$$M = I - H = I - C (C^T C)^{-1} C^T$$

Тогда левая часть уравнения:

$$X^T M X = X^T (I - C (C^T C)^{-1} C^T) X = X^T X - X^T C (C^T C)^{-1} C^T X$$

А правая часть уравнения, соответственно:

$$X^T M \vec{y} = X^T (I - C (C^T C)^{-1} C^T) \vec{y} = X^T \vec{y} - X^T C (C^T C)^{-1} C^T \vec{y}$$

Подставляем:

$$(X^T M X) \hat{\vec{\beta}} = X^T M \vec{y}$$

Доказательство теоремы Фриша-Во-Ловелла

$$(X^T M X) \hat{\vec{\beta}} = X^T M \vec{y}$$

$$\hat{\vec{\beta}} = (X^T M X)^{-1} X^T M \vec{y}$$

Так как M симметрична и идемпотентна ($M^T = M$, $M^2 = M$):

$$X^T M^T M X = X^T M X, \quad X^T M^T M \vec{y} = X^T M \vec{y}$$

Получается, что $\hat{\vec{\beta}}$ – это оценки коэффициентов при предикторах в регрессии $M\vec{y}$ на MX , то есть, регрессии остатков на остатки, что и требовалось доказать